Corso di laurea: BIOLOGIA

Tutor: Floris Marta; Max Artizzu

PRECORSI DI MATEMATICA

LOGARITMI

L'uguaglianza:

$$a^x = b$$

nella quale a e b rappresentano due numeri reali noti ed x un'incognita, è un'equazione di tipo esponenziale (si ricordi che un'equazione prende il nome dalla posizione che occupa l'incognita; per esempio, se l'incognita compare in un denominatore l'equazione si dice fratta; così se compare in un esponente si dice esponenziale).

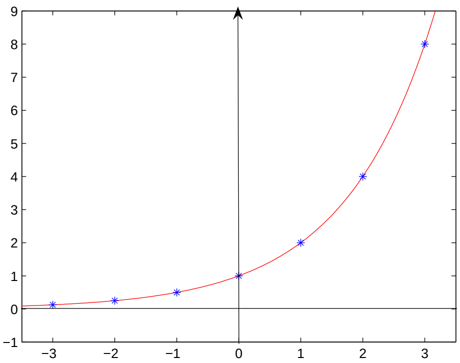


Figura 1

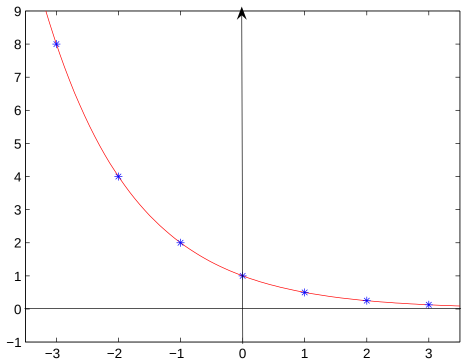


Figura 2

Dai grafici riportati nelle figure 1 e 2, appare chiaramente che, sotto le condizioni $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ l'equazione proposta ammette una ed una sola soluzione; **esiste** cioè **uno ed un solo numero x che attribuito come esponente ad a da b**. Questo numero viene detto <u>**logaritmo in base a di b**</u> e viene simbolicamente così rappresentato:

$$x = log_a b$$

Riportiamo qui di seguito alcuni esempi di calcoli di logaritmi.

1. $log_2 32 = 5$; $log_3 81 = 4$; $log_{10} 100 = 2$; $log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = 3$.

2. $log_2 \frac{1}{8} = -3$; $log_5 \frac{1}{5} = -1$; $log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = -2$.

3. $log_5 5 = l$; $log_{0,8} 0,8 = 1$; $log_3 1 = 0$; $log_{\frac{3}{3}} 1 = 0$.

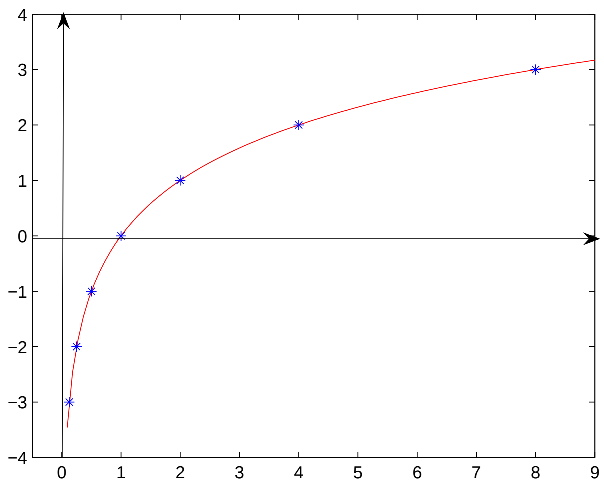
4. $log_8 2 = \frac{1}{3}$; $log_4 8 = \frac{3}{2}$; $log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$.

Non è invece possibile calcolare mentalmente quanto vale, ad esempio, il $log_{10} 325$. Si può solo dire che è un numero compreso tra 2 e 3; per determinarlo con una maggiore precisione sono necessari alcuni strumenti.

LA FUNZIONE LOGARITMICA

Se a è un numero positivo diverso da 1 l'espressione $log_a x$ (con $x > 0$) varia al variare di x; posto $y = log_a x$ si ottiene una funzione che viene detta **funzione logaritmica**.

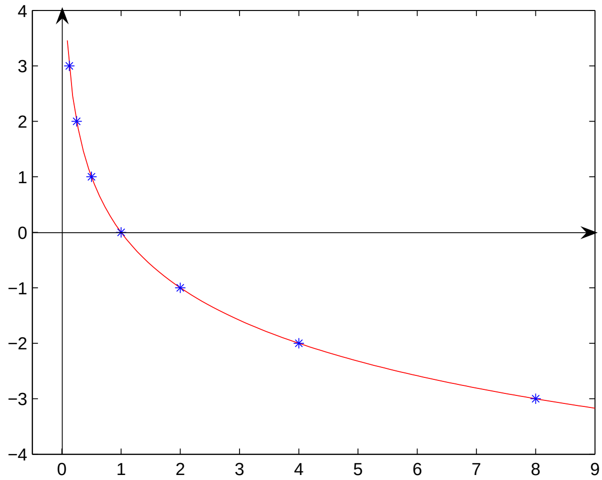
x	$y = log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Per individuare le caratteristiche della funzione logaritmica ci limitiamo a rappresentarla graficamente per punti nel piano cartesiano, distinguendo i due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$. Nella figura 3 è rappresentata la funzione $y = log_2 x$ e nella figura 4 la funzione $y = log_{\frac{1}{2}} x$.

Tutte le funzioni logaritmiche $y = log_a x$ che hanno la base a maggiore di 1 hanno l'andamento della prima (sono crescenti, sono negative per $0 < x < l$ e positive per $x > 1$, tendono a $-\infty$ per x tendente a 0 e a $+\infty$ per x tendente a $+\infty$); tutte quelle che hanno la base a compresa tra 0 e 1 hanno l'andamento della seconda (sono decrescenti, sono positive per $0 < x < 1$ e negative per $x > 1$, tendono a $+\infty$ per x tendente a 0 e a $-\infty$ per x tendente a $-\infty$).

x	$y = log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

I logaritmi godono di alcune proprietà. Enunciamole.

1. *Il logaritmo di un prodotto di fattori positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori*; cioè:

$$log_a(b \cdot c \cdot d \cdot ...) = log_a b + log_a c + log_a d + ...$$

2. *Il logaritmo di un quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo ed il logaritmo del divisore;*

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$$

3. *II logaritmo della potenza di un numero positivo, ad esponente reale qualunque, è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base della potenza*

$$log_a(b^n) = n \cdot log_a b$$

4. *Il logaritmo in base a di un numero b diverso da 1, è uguale al reciproco del logaritmo in base b del numero a.*

$$log_a(b) = \frac{1}{log_b a} = -log_{\frac{1}{a}} b$$

5. *Il logaritmo in base a di un numero N è uguale al prodotto tra il logaritmo dello stesso numero N in un'altra base b ed il reciproco del logaritmo di a in base b*

$$log_a\,(x) = log_b\, x \cdot \frac{1}{log_b\, a}$$

   che si esprime anche come $log_b\, x = log_a\,(x) \cdot log_b\, a$

6. $log_a\, 1 = 0$;

7. $log_a a = 1$;

8. $a^{log_a b} = b$;

Per semplicità di calcolo, per dimostrare la prima delle proprietà elencate ci limitiamo al caso di due soli fattori; dimostriamo cioè che:

$$log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$$

A tale scopo poniamo:

$$log_a\, b = x \qquad e \qquad log_a c = y.$$

Per la definizione di logaritmo varranno allora anche le due uguaglianze:

$$a^x = b \qquad e \qquad a^y = c$$

che, moltiplicate membro a membro, danno:

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c \qquad e\, quindi \qquad a^{x+y} = b \cdot c$$

Dall'ultima uguaglianza scritta si deduce che l'esponente da dare ad a per ottenere $b \cdot c$ è $x + y$, il che equivale a dire (per la definizione di logaritmo) che:

$$log_a(b \cdot c) = x + y$$

e quindi, ricordando le posizioni fatte, che:

$$log_a(b \cdot c) = log_a\, b + log_a\, c$$

Prima di passare ad esemplificare le proprietà dei logaritmi osserviamo che valgono ovviamente anche le proprietà inverse (ad esempio: la somma di due logaritmi in una stessa base è uguale ...).

ESEMPI

1. $log_a\, 2^5 \cdot 3 = log_a\, 2^5 + log_a 3.$
2. $log_a \sqrt[3]{\frac{7}{5}} = log_a \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(log_a 7 - log_a 5)$
3. $log_2 8 = \frac{1}{log_8 2}$
4. $log_6 25 = log_{10} 25 \cdot \frac{1}{log_{10} 6}$
5. $2log_2 10 + log_2 80 - 3log_2 5 = log_2(10)^2 + log_2 80 - log_2 5^3 = log_2 \frac{10^2 \cdot 80}{5^3} = log_2 64 = 6$

I LOGARITMI DECIMALI. CENNO AI LOGARITMI NATURALI

L'insieme dei logaritmi di tutti i numeri reali positivi in una data base a viene chiamato *sistema di logaritmi in base a.* Tra tutti gli infiniti sistemi di logaritmi assumono grande importanza quello in base 10, che viene comunemente chiamato dei ***logaritmi decimali*** o di Briggs, e quello in base e (con la lettera e viene indicato un particolare numero irrazionale che ricorre assai spesso nelle matematiche superiori e nello studio teorico di molti fenomeni fisici, statistici, ecc., e del quale riportiamo un valore approssimato: e = 2,718281828...), che viene comunemente detto dei ***logaritmi naturali*** o *neperiani.*

L'importanza del primo di questi sistemi di logaritmi è ovviamente legata al fatto che, essendo il nostro sistema di rappresentazione numerica di tipo decimale, sono assai più facili la compilazione, e soprattutto l'uso, di tavole numeriche che permettono di calcolare rapidamente logaritmo decimale di qualsiasi numero. L'importanza del secondo di questi sistemi è dovuta al fatto che in molte leggi naturali, fisiche, statistiche, ecc., le grandezze in gioco sono tra loro legate da funzioni di tipo esponenziale a base e o di tipo logaritmico a base e (funzioni che, tra l'altro, godono di notevoli proprietà matematiche).

Le tavole logaritmiche che forniscono i logaritmi in base dieci sono comunque utilizzabili anche per il calcolo di logaritmi in base e (come del resto di logaritmi in qualsiasi base); infatti, per la proprietà relativa al cambiamento di base, il logaritmo in base e di un qualsiasi numero x positivo è:

$$log_e x = log_{10} x \cdot \frac{1}{log_{10} e}$$

e quindi, una volta noto il valore del modulo di trasformazione $\frac{1}{log_{10} e}$ (che vale circa 2,3026), è numericamente noto tutto il sistema di logaritmi in base e. Per quanto poi riguarda le calcolatrici tascabili osserviamo che tra queste quelle atte al calcolo di logaritmi sono in genere in grado di fornire direttamente sia i logaritmi decimali che quelli naturali.

Per semplicità di scrittura, d'ora in poi indicheremo il logaritmo decimale con il simbolo log, tralasciando l'indicazione della base; indicheremo invece il logaritmo naturale con il simbolo ln, tralasciando anche in questo caso l'indicazione della base. Avremo così:

$$log\, x = log_{10}\, x \qquad e \qquad ln\, x = log_e\, x$$

LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione nella quale compare il logaritmo dell'incognita, o di espressioni contenenti l'incognita, viene detta equazione logaritmica. In genere, per risolvere un'equazione logaritmica si cerca di portarla, applicando le proprietà dei logaritmi, nella forma

$$(a) \qquad\qquad log_a A(x) = log_a B(x)$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono due espressioni contenenti l'incognita x, che vengono denominate *argomenti* dei logaritmi.
Affinchè siano uguali i due membri della (a) è necessario che siano uguali le due espressioni $A(x)$ e $B(x)$; è possibile quindi passare dalla (a) all'equazione

$$(b) \qquad\qquad A(x) = B(x)$$

Si tenga però presente che l'equazione data, la (a) (alla quale si giunge mediante l'applicazione delle proprietà dei logaritmi) e la (b) non sono, in generale, equivalenti tra loro. Infatti, mentre le soluzioni della (a) sono certamente tutte soluzioni anche dalla (b), non è vero il viceversa: la (b) potrebbe avere delle soluzioni che rendono uguali, ma negative, le due espressioni A(x) e B(x), e che pertanto non possono essere soluzioni anche dalla (a). Per esempio, l'equazione:

$$log_a(2 - x) = log_a(x - 4)$$

e l'equazione

$$2 - x = x - 4$$

(che si ottiene dalla prima passando dall'uguaglianza tra i due logaritmi a quella tra gli argomenti), non sono equivalenti; infatti, mentre x = 3 è soluzione della seconda, non lo è della prima, poiché rende uguali, ma negative, le due espressioni 2 - xex - 4. Analogamente, la (a) potrebbe avere soluzioni che rendono uguali e positive le due espressioni $A(x)$ e $B(x)$, ma che non rendono positive tutte le espressioni che compaiono sotto segno di logaritmo nell'equazione data. Così, per esempio, l'equazione

$$log_a(x+1) + log_a x = log_a(4+x)$$

e l'equazione

$$log_a(x^2+x) = log_a(4+x)$$

(che si ottiene dalla prima applicando nel suo membro di sinistra una proprietà dei logaritmi), non sono equivalenti; infatti, mentre x = - 2 è soluzione della seconda perché rende uguali e positive le due espressioni x^2+x e $4+x$, non può essere soluzione anche della prima, poiché rende negative le espressioni $x+1$ e x che compaiono sotto segno di logaritmo nel membro di sinistra.

Concludiamo quindi che, per risolvere un'equazione logaritmica si cerca, in genere, di portarla prima nella forma (a) e poi nella forma (b); quindi, risolta quest'ultima, si sostituiscono le soluzioni trovate all'incognita nell'equazione data per vedere se tutti gli argomenti dei logaritmi assumono valori positivi; solo se tale condizione è verificata le soluzioni della (b) saranno soluzioni anche dell'equazione proposta.

Invece di eseguire questa verifica è possibile stabilire fin dall'inizio, mediante la risoluzione di opportune disequazioni, a quali condizioni devono soddisfare le soluzioni dell'equazione proposta affinchè possano essere accettabili. Illustreremo questo procedimento mediante alcuni esempi.

Esempi

1. Risolvere l'equazione:

$$2log(x-2) = log(x+5) + log\, x$$

   I logaritmi contenuti in questa equazione hanno significato solo se alla x vengono attribuiti valori che soddisfano a tutte le condizioni del sistema:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x+5>0 \\ \quad x \quad >0 \end{cases}$$

   e quindi valori maggiori di 2. La condizione $x > 2$ è perciò la condizione a cui debbono soddisfare le soluzioni dell'equazione data. Applicando ai due membri dell'uguaglianza le proprietà dei logaritmi si ottiene l'equazione di tipo (a):

$$log(x-2)^2 = log[(x+5)x]$$

   e quindi quella di tipo (b):

$$(x-2)^2 = (x+5)x$$

   Risolvendo quest'ultima si ha $x = \frac{4}{9}$; poiché questo valore non soddisfa alla condizione $x > 2$ non è accettabile come soluzione dell'equazione proposta, che risulta pertanto essere impossibile.

2. Risolvere l'equazione:

$$log_2(x^2+x+1) + 3 = log_2(8-x^2)$$

   Sono accettabili solo soluzioni soddisfacenti ad entrambe le disequazioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ \quad 8-x^2 \quad >0 \end{cases}$$

e quindi soddisfacenti alla condizione $-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$. Sostituendo al 3 il $log_2 8$; S e procedendo poi come descritto nel precedente esempio si ottiene:

$$log_2(x^2 + x + 1) + log_2 8 = log_2 (8 - x^2)$$

$$log_2[8(x^2 + x + 1)] = log_2(8 - x^2)$$

$$8(x^2 + x + 1)] = 8 - x^2$$

Le soluzioni di quest'ultima, che sono $x = 0$ e $x = -\frac{8}{9}$, sono entrambe accettabili come soluzioni dell'equazione data.

Non in tutti i casi è possibile ricondurre una equazione logaritmica all'uguaglianza tra due logaritmi nella stessa base. Illustriamo con un esempio un altro tipo di situazione ed il relativo procedimento di risoluzione.

Esempio

Risolvere l'equazione:

$$log_3 x - 2 = \frac{3}{log_3 x}$$

L'equazione è logaritmica e fratta; sono pertanto accettabili solo soluzioni soddisfacenti alle condizioni $x > 0$ e $log_3 x \neq 0$, e quindi positive ma diverse da 1. Riducendo tutti i termini allo stesso m.c.d. $= log_3 x$ e liberando poi l'equazione dai denominatori si ha:

$$log_3^2 x - 2log_3 x - 3 = 0.$$

Risolvendo quest'ultima come un'equazione di secondo grado nell'incognita $log_3 x$ si ottiene:

$$log_3 x = 3 \qquad e \qquad log_3 x = -1$$

e quindi $x = 27$ e $x = \frac{1}{3}$ (soluzioni entrambe accettabili).

ESERCIZI

1. *Calcolare i valori dei seguenti logaritmi, procedendo come in (a):*

   (a) $log_2 \frac{1}{4} = log_2 4^{-1} = log_2 2^{-2} = -2 \underbrace{log_2 2}_{} = 1 = -2$

   (b) $log_2 \frac{1}{32}$

   (c) $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

   (d) $log_2 \sqrt{2}$

   (e) $log_3 \sqrt[3]{3^2}$

   (f) $log_2 \sqrt{4^3}$

   (g) $log_3 \sqrt{\sqrt{27}}$

   (h) $log_x \sqrt[4]{x}$

   (i) $log_a \sqrt{a}$

   (j) $log_{\frac{5}{4}} \frac{256}{625}$

   (k) $log_{\frac{1}{a}} a\sqrt{a}$

   SOLUZIONI: $b) -5$; $c)\, 2$; $d)\, \frac{1}{2}$; $e)\, \frac{2}{3}$; $f)\, 3$; $g)\, \frac{3}{4}$; $h)\, \frac{1}{4}$; $i)\, \frac{1}{2}$; $j)\, -4$; $k)\, -\frac{3}{2}$.

2. *Trovare l'argomento del logaritmo*

   (a) $lg_3 x = 1$

   Facciamo il passaggio inverso delle equazioni esponenziali, trasformiamo la nostra equazione in un altra dove i membri della (a) compaiono come esponenti di una stessa base, che è la base del logaritmo. Cioè diventa:

   $$3^{lg_3 x} = 3^1$$

   Per le proprietà dei logaritmi si sa che $a^{log_a b} = b$. Rimane: $x = 3$.

(b) $log_{\frac{1}{3}} x = 2$ $[x = \frac{1}{9}]$

(c) $log_3 x = \frac{1}{2}$ $[x = \sqrt{3}]$

(d) $log_{27} x = \frac{2}{3}$ $[x = 9]$

(e) $log_4 x = \frac{5}{4}$ $[x = \sqrt{32}]$

(f) $log_{0,25} x = -1$ $[x = 4]$

(g) $log_4 x = \frac{1}{4}$ $[x = \sqrt{2}]$

(h) $log_a x = -2$ $[x = \frac{1}{a^2}]$

3. *Trovare la base del logaritmo*

   (a) $log_x 27 = 3$

   Procediamo come nell'esercizio precedente, eleviamo entrambi i membri prendendo come base x:

$$x^{log_x 27} = x^3$$

   Per la proprietà $a^{log_a b} = b$ rimane: $x = 3$

   (b) $log_x \frac{1}{5} = -1$ $[x = 5]$

   (c) $log_x \frac{1}{8} = 3$ $[x = \frac{1}{2}]$

   (d) $log_x \frac{1}{8} = -3$ $[x = 2]$

   (e) $log_x \sqrt{a^3} = \frac{3}{2}$ $[x = a]$

   (f) $log_x 2\sqrt[3]{2} = -\frac{4}{3}$ $[x = \frac{1}{2}]$

   (g) $log_x 0,008 = 3$ $[x = 0,2]$

4. *Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche.* Le soluzioni fra parentesi tonde non sono accettabili

   (a) $log_2(3x) - log_2 9 = 1$ $[x = 6]$

   (b) $log_5(8 - x) + 2 = log_5 10$ $[x = \frac{38}{5}]$

   (c) $log_b (x + 2) = 2log_b x$ $[x = 2, (x = -1)]$

   (d) $log\, 2 + log\, 5 - log\, x = log(x + 3)$ $[x = 2, (x = -5)]$

   (e) $\frac{log_a (x+3)}{log_a (2-x)} = 1$ $[x = -\frac{1}{2}]$

   (f) $\frac{1}{1+log\, x} = \frac{2}{1-log\, x}$ $[x = 10^{-3}]$

   (g) $\frac{2-log\, x}{1+log\, x} + \frac{3-log\, x}{1-log\, x} + 1 = 0$ $[x = 10^2,\ x = 10^5]$

   (g) $log_3 \sqrt{3x + 4} = log_3 \sqrt{2x + 1} + log_3 2$ $[x = 0]$